АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СУДОКУ
С ПОМОЩЬЮ КАРАНДАША И БУМАГИ
Дж. Ф. Крук

J.F. Crook, A Pencil-and-Paper Algorithm for Solving Sudoku Puzzles,
Notices of AMS, V. 56, No. 4 (April 2009), pp. 460-468
(Заметки Американского математического общества,
том 56, № 4 (Апрель 2009), с. 460-468).

Перевод с английского Н. Ивановой, М. Лапаевой и Т. Оберемченко
под ред. проф. М. Кипниса
Перевод размещен в сети Интернет с любезного разрешения автора и
Американского математического общества

Решение задач судоку − страсть многих людей во всем мире уже несколько лет. Собственно говоря, судоку − тривиальная задача. Причина тривиальности в том, что существует алгоритм для решения судоку.

Всё, что должен сделать человек, это сесть за персональный компьютер, ввести числа, данные в задаче, и наблюдать, как компьютерная программа вычисляет решение. Мы можем спросить, зачем человек так трудится, пытаясь решить задачи судоку. Причина в том, что люди очень любят решать судоку с помощью бумаги и карандаша. Henzberg и Murty (2007, с. 716) указывают два мотива.

Во-первых, судоку это некоторый интеллектуальный вызов пытающемуся решить задачу. Во-вторых, просто просматривая ряды и колонки, легко найти недостающие цифры, и это вдохновляет.

Эта статья дает алгоритм решения с помощью карандаша и бумаги любых задач судоку, особенно тех, которые называют *дьявольскими*.

Примечание 1 *(прим. редакции журнала). Дж. Ф. Крук является почетным профессором компьютерных наук Университета Уинтропа, Рок Хилл, Южная Каролина. Его электронный адрес: crookj@winthrop.edu*

Примечание 2 *(Прим. автора. Все дальнейшиее примечания также принадлежат автору, если не оговорено противное). Я благодарю Джона Хона, Катрин Купер, Дэвида Жиля и Либби Ниди за прочтение этой статьи. Я также благодарен Лоретте Нидеркот за то, что она подарила мне первые две книги по судоку – на Рождество в 2005 году и к моему 70-летию в 2007 году.*

Определение доски судоку

Судоку решается на доске 9×9. На доске 81 ячейка, они объединены в девять групп по 3×3. Мы называем эти группы боксами и нумеруем их от 1 до 9, начиная с верхнего левого угла, как показано на рисунке 1.

Чтобы обратиться к нужной ячейке, нужно задать номер строки и номер столбца. Например, 67 означает ячейку строке 6 и столбце 7. Число, находящееся в ячейке *mn*, обозначаем посредством *c(mn)* (от слова cell, ячейка). Мы развиваем теорию на основе понятия *приоритетных множеств*. Sheldon (2006) называет их товариществами. Mepham (2005) использует понятие *разделения числа*. Теория, развитая здесь, относится к решению задач судоку всех размеров.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2		**1**			**2**			**3**	
3									
4									
5		**4**			**5**			**6**	
6									
7									
8		**7**			**8**			**9**	
9									

Рис. 1. Доска судоку

Примечание 3. *Доски судоку могут быть классифицированы на регулярные и нерегулярные. Пусть m есть ширина и высота бокса, $m \geq 2$. Тогда ширина и высота регулярных досок судоку m^2. Размеры регулярных боксов и досок для некоторых m даны в следующей таблице.*

Ширина и высота бокса, m	Количество боксов, m^2	Число клеток на доске, $m^2 \times m^2$
2	4	16
3	9	81
4	16	256
5	25	625
6	36	1296

Наиболее распространенная из нерегулярных досок судоку имеет размеры 6×6 боксов, каждый из которых размером 2×3. Газета «USA Today» регулярно печатает задачи 6×6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			**1**	**9**					**8**
2	**6**				**8**	**5**		**3**	
3			**7**		**6**		**1**		
4		**3**	**4**		**9**				
5				**5**		**4**			
6					**1**		**4**	**2**	
7			**5**		**7**		**9**		
8		**1**		**8**	**4**				**7**
9	**7**					**9**	**2**		

Рис. 2. Пример задачи судоку

Приоритетные наборы и теорема заполнения

Единственный самый важный инструмент для того, чтобы решать задачи судоку, основан на определении решения судоку.

Определение 1 (решение судоку). *Решение судоку требует, чтобы каждая строка, столбец и бокс содержали весь набор [123456789], и чтобы каждая ячейка была занята одним и только одним числом.*

Это определение означает, что ни в каких строках, столбцах и боксах числа не повторяются. Пример задачи судоку показан на рисунке 2.

Трудные задачи судоку могут быть решены эффективно, если в каждой пустой ячейке записывать числа, которые могут ее занять. Этот список *возможных* чисел для каждой ячейки называют *пополнением* ячейки. Пополнения ячеек задачи судоку, показанной на рисунке 2, изображены на рисунке 3.

Определим теперь *приоритетные наборы*, которые являются основным инструментом для того, чтобы решать судоку до того момента, когда либо: (1) найдено полное решение, либо (2) продолжение требует случайного выбора одного из двух или более чисел для заполнения пустой клетки.

Определение 2 (приоритетные наборы). *Приоритетный набор составлен из чисел [1,2,…9] и является множеством мощности m, $1 \le m \le 9$, состоящим из чисел, которые являются исключительными оккупантами m ячеек, где исключительность означает, что никакие другие числа из множества [1,2,..9], кроме членов приоритетного набора, не являются потенциальными оккупантами этих m клеток.*

Приоритетный набор обозначают:

$\{[\, n_1 n_2 \ldots n_m],\ [i_1 j_1,\ i_2 j_2, \ldots, i_m j_m]\}$, где $[n_1 n_2 \ldots n_m]$, $1 \le n_i \le 9$ для $i=1,2,..,m$, обозначает множество чисел в приоритетном наборе, а $[i_1 j_1,\ i_2 j_2, \ldots, i_m j_m]$ обозначает набор из m ячеек, в которых множество $[n_1 n_2 \ldots n_m]$ должно разместиться.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2345	245	1	9	23	237	567	4567	8
2	6	249	29	1247	8	5	7	3	249
3	234589	24589	7	234	6	23	1	459	2459
4	1258	3	4	267	9	2678	5678	15678	156
5	1289	26789	2689	5	23	4	3678	16789	1369
6	589	56789	689	367	1	3678	4	2	3569
7	2348	2468	5	1236	7	1236	9	1468	1346
8	239	1	2369	8	4	236	356	56	7
9	7	468	368	136	35	9	2	14568	13456

Рис. 3. Пополнения клеток задачи судоку рисунка 2.

Примечание 4 (от редактора перевода)**.** *В оригинале статьи в Рис. 3 ошибки в клетках 47 и 57.*

Примечание 5 (от редактора перевода). *Чтобы указать приоритетный набор данного бокса или данной строки или данного столбца, требуется указать некоторое подмножество A мощности m, 1≤m≤9 множества [12…9] и ровно m клеток в данной строке, данном столбце или боксе, такие что в каждой из указанных клеток пополнение является подмножеством множества A.*

Определение 3 (Область приоритетного набора). *Область приоритетного набора – это строка, столбец или бокс, в которых расположены ячейки приоритетного набора. Если m = 2 или m = 3, область может быть одним из множеств [строка, бокс] или [столбец, бокс].*

Приоритетный набор это множество *m* различных чисел из множества [12…9] и множество *m* ячеек, занятых *m* числами, распределенными в *m* ячейках, со свойством, что распределение *m* чисел среди *m* ячеек еще неизвестно к моменту конструирования приоритетного набора. Это распределение выяснится в дальнейшем процессе решения.

Пример приоритетного набора показан на Рис. 4, где числа большого размера числа даны в исходном судоку, и числа маленького размера внизу являются пополнением. Мы полагаем, что числа 2,8 в клетке 83 и число 2 в клетке 93 зачеркнуты в результате предыдущих действий и к моменту рассмотрения рис. 4 не должны приниматься во внимание. На рис. 4a мы видим приоритетный набор {[*3459*], [*71, 72, 83, 93*]}, который имеет мощность 4. Этот набор будем называть *квадруплем.* Приоритетные наборы мощностей 1,2,3 - это соответственно *сингль, дупль и трипль*.

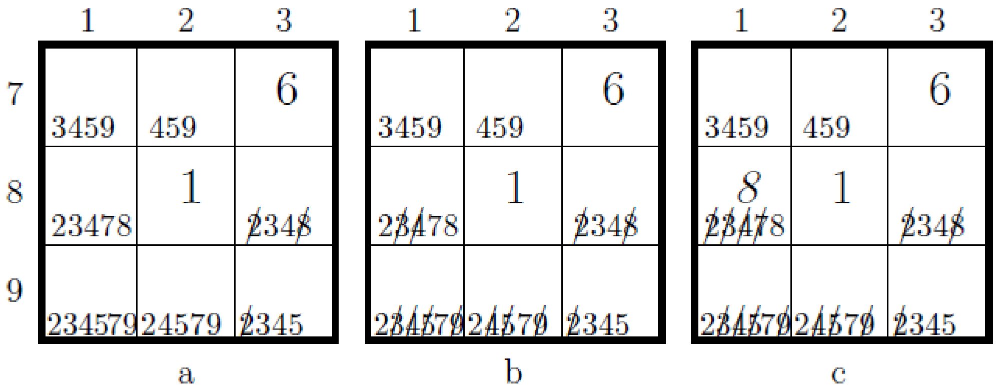

Рис. 4. Бокс с приоритетным набором 3459 мощности 4 (a, квадрупль), выявленным приоритетным набором 27 мощности 2 (b, дупль) и синглем 8 (c).

Мы считаем множество $[3459]$ вместе с выделенными клетками на рис. 4 *приоритетным набором* ввиду справедливости четырех включений

$$[3459] \subseteq [3459], \quad [459] \subseteq [3459], \quad [34] \subseteq [3459] \quad [345] \subseteq [3459].$$

Как указано в следующей теореме, в решении судоку на рис. 4 ни одно из чисел 3,4,5,9 не должно оккупировать ни одну из клеток вне приоритетного набора. Это объясняет наши зачеркивания в Рис. 4b. После зачеркивания чисел 3,4,5,9 (рис. 4b) мы обнаруживаем дупль {[*27*], [*91, 92*]}. Вычеркиваем числа 2,7 из клетки 81, не входящей в дупль (см. Рис. 4c). Так как число 8 в ячейке 81 стало синглем, мы вписываем его в клетку.

Теорема 1 (Теорема о заполнении). *Пусть X приоритетный набор. Тогда любое число из X, которое появляется в пополнении клетки вне приоритетного набора, но в его области, не может входить в эту клетку в решении этого судоку.*

Доказательство. Положим, какое-либо число из множества *X* попадет в клетку, которая не принадлежит области этого *X*. Тогда количество таких чисел в *X* будет сокращено с *m* до *m-1*. Значит, одна из *m* клеток в *X* будет пуста, что противоречит условиям решения судоку. Следовательно, для продолжения частичного решения необходимо, чтобы все числа из *X* были удалены из тех клеток, что не входят в область определения *X*.

Литература по судоку часто использует понятие *скрытой пары, скрытой тройки*, и т.д., см., например, Mepham (2005, стр.9). Такие скрытые пары, тройки и т.д. – просто приоритетные наборы, ожидающие своего раскрытия, как будет показано далее. Примером скрытой пары может служить пара [35], показанная в левом боксе на рис. 5.

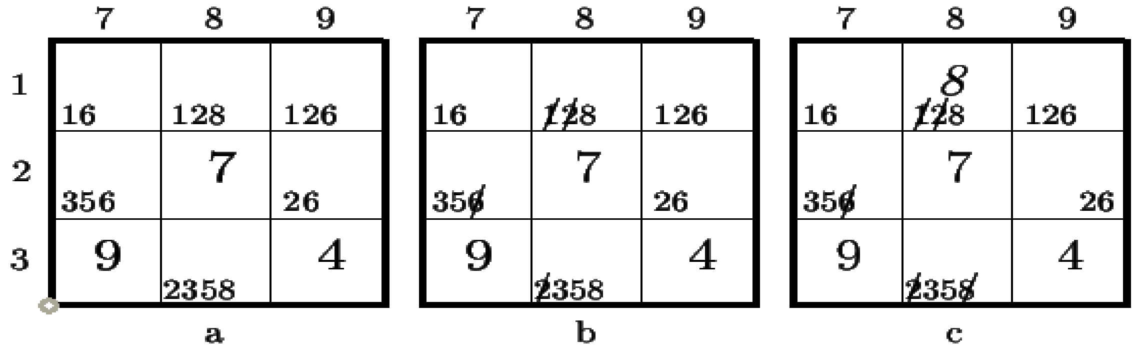

Рис. 5. Выбор скрытой пары в приоритетном наборе.

Эта пара является скрытой, потому что в клетке 27 к ней присоединено число 6, а в клетке 38 числа 2 и 8. Мы обнаружим приоритетный набор {[35] , [27,38]} следующим образом. При первом взгляде на левый бокс немедленно обнаружим приоритетный набор: {[126] , [17,19,29]}, который после зачеркивания чисел 1, 2 и 6 в клетках, не входящих в приоритетный набор, дает рис. 5b. Далее на рис. 5b мы видим сингль 8 в клетке 18, что означает, что 8 есть единственное число для клетки 18. Следовательно, мы зачеркиваем 8 в клетке 38, и в результате получаем приоритетный набор {[35], [27,38]}.

Читатель легко докажет следующую теорему, указывающую, что основным инструментом для решения задач судоку является приоритетный набор.

Теорема 2 (О приоритетных наборах). *Всегда существует приоритетный набор, определяющий скрытый и переводящий его в приоритетный, за исключением случая сингля.*

Скрытые наборы, однако, очень полезны, так как иногда их обнаружить легче, чем соответствующий приоритетный, особенно если это скрытый сингль или дупль.

Три бокса на рис. 5 являются хорошим примером разбиения набора [123568], *естественно присутствующего* в боксе, на два набора.

Алгоритм решения судоку

В этой главе мы укажем алгоритм для решения задач судоку.

Примечание 6. *Решение задачи судоку не обязательно единственно, и это, по-видимому, хорошо известно серьезным игрокам в судоку (см. раздел «К вопросу о единственности решения судоку»). Некоторые эксперты, например, Sheldon (2006), утверждают, что все опубликованные задачи судоку должны иметь единственное решение. Однако эта точка зрения не универсальна. Действительно, Thomas Snyder (США), выигравший в 2007 году чемпионат мира по судоку в Праге (Чехия), решил задачу, которая имела ровно два решения. Вот как выглядела эта задача:*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		**5**			**2**			**3**	
2	**2**					**1**	**7**		**8**
3	**4**		**7**	**6**					
4						**5**			
5	**5**	**2**						**4**	**7**
6				**7**					
7						**3**	**5**		4
8	**3**		**6**	**5**					**1**
9		**9**			**7**			**6**	

См. http://wpc.puzzles.com/sudoku/jigsawFinals.htm

Мы нашли эти два решения. Они отличаются лишь по квадрату 2×2, *в боксах 5 и 6. Вот эти отличия:*

	6	7
5	6	8
6	8	6

и

	6	7
5	8	6
6	6	8

Эта задача, конечно, трудна, но с применением алгоритма, описанного в данной статье, может быть решена в течение часа. В London Times сообщалось, что Thomas Snyder потратил около 5 минут, чтобы найти решение и проверить его. Herzberg и Murty (2007, рис.3–5, стр. 711–712) нашли задачи с теми же свойствами, что решил Thomas Snyder.

В первом примере мы даем задачу, требующую для решения только применения понятия приоритетного набора. Во втором примере, используя тот же метод, мы придем к шагу, на котором необходимо сделать выбор случайного числа. После такого выбора для данной клетки алгоритм возвращается к использованию приоритетных наборов, пока не будет достигнут окончательный результат или не потребуется шага для выбора еще одного случайного числа, и т.д.

Перед тем, как начать решение судоку, необходимо просмотреть все пустые клетки для выяснения, каких именно чисел в них не хватает. Проще всего начинать работать с числом, частота присутствия которого наибольшая. Этот метод состоит в том, чтобы отыскать места, в которых такое число отсутствует, и определить единственную клетку, куда можно определить это число. Если такая клетка существует, желательно записать в неё данное число. Если больше подобных чисел нет, нужно проделать то же с числом, частота которого теперь является самой высокой, и т.д., пока не останется чисел, которые можно было занести в клетки.

Для поиска решения только методом приоритетных множеств мы взяли пример, принадлежащий Уиллу Шортцу (Will Shortz, 2006, задача 301), который мы будем называть Shortz 301. Задача, изображенная на Рис. 6, относится к классу очень сложных (*Beware! Very Challenging*).

	3	9	5					
			8				7	
				1		9		
1			4					3
		7				8	6	
		6	7		8	2		
	1			9				5
					1			8

Рис. 6. Судоку 301 Уилла Шортца

Решение судоку Шортц 301

В Shortz 301 быстро находим два числа: 1 в клетке 23 и 9 в 26. После ввода этих чисел сделаем разметку всей головоломки. Такого рода разметку задачи можно сделать как вручную, так и с помощью компьютерной программы. Разумнее использовать для столь трудоемкой задачи компьютерную программу (см. J. Crook (2007), Visual Basic program for marking up Sudoku puzzles. Программа работает в Microsoft Excel. Excel был выбран потому, что для этой задачи он весьма хорош). Разметка Shortz 301 изображена на рис. 7 вместе с уже включенными числами, упомянутыми выше.

Теперь читателю рекомендуется скопировать рис. 7, сделав в нем некоторые записи и вычеркивания, описанные ниже.

При первом просмотре задачи можно заметить трипль {[126], [17,19,29]} в боксе 3, как на рис. 5. Вычеркнем все цифры 1,2 и 6 во всех клетках третьего бокса, кроме 17,19,29. В результате определим 8 в клетке 18, как показано на рис. 8.

Нижний индекс числа 8 в клетке 18 на рис. 8 указывает последовательность записей в процессе решения всей задачи. Когда число вписано в клетку, все остальные *экземпляры* этого числа в соответствующих строке, столбце и боксе должны быть вычеркнуты. Таким образом, вычеркиваем 8 из 11 на рис. 7, как показано на рис. 8.

В пополнении девятого столбца на рис. 7 существует скрытый сингль 7 в 59. Вычеркнем 1,2 и 9 в 59 на рис. 8 и определим туда 7_2, вычеркнув семерки из 47, 55, 56 и 57, как на рис. 8.

Примечание 7. *Выявление приоритетного квадрупля {[1269], [19,29,69,79]} в столбце 9 также помогло бы выявить сингль 7 в столбце 9.*

Записи от 5_3 до 5_5 на рис.8 не требуют пояснений. Далее мы замечаем трипль {[236], [34,84,94]} в столбце 4 на рис. 7. Следовательно, зачеркиваем 2,3,6 в других клетках столбца 4, как показано на рис. 8. Такие действия приводят к возникновению дупля [19] в столбце 4 и в боксе 5. К сожалению, нет чисел 1 и 9, которые можно было бы вычеркнуть из других клеток бокса 5; значит, существование дупля здесь не приводит к немедленному решению.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	24678	3	9	5	2467	2467	16	128	126
2	2456	2456	1	8	2346	9	356	7	26
3	25678	25678	258	236	1	2367	9	2358	4
4	1	25689	258	4	25678	2567	57	259	3
5	2345689	245689	23458	12369	235678	23567	1457	12459	1279
6	23459	2459	7	1239	235	235	8	6	129
7	3459	459	6	7	345	8	2	1349	19
8	23478	1	2348	236	9	2346	3467	34	5
9	234579	24579	2345	236	23456	1	3467	349	8

Рис. 7. Разметка судоку Шортц 301.

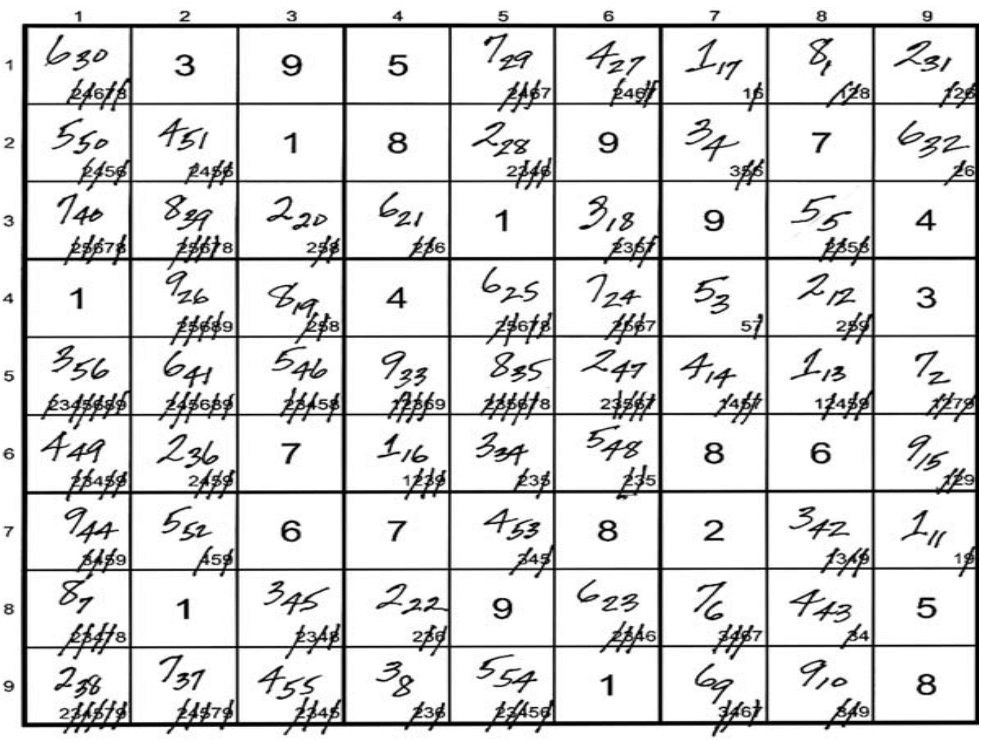

Рис. 8. Решение судоку Шортц 301

Существует дупль [28] в столбце 3, в клетках 33 и 43 на рис. 8, который помогает обнаружить квадрупль {[3459], [71,72,83,93)]} в боксе 7. Этот квадрупль можно также обнаружить на рис. 4. Затем замечаем дупль {[34] , [83,88)]} в строчке 8, еще дупль {[27], [91,92)]} в строчке 9, и, наконец, дупль {[26], [84, 86)]} в строчке 8 и боксе 8.

Теперь, в результате открытия этих пяти приоритетных наборов, открывается сингль 7 в пополнении клетки 87 на рис. 8, поэтому ставим 7_6 в 87.
Существует также сингль 8 в пополнении клетки 81 и сингль 3 в 94, поэтому получаем 8_7 и 3_8 в 81 и 94 соответственно. Наконец, дупль {[45] , [93, 95)]} дает 6_9 и 9_{10}. Остальные заполнения клеток легко просматриваются, начиная с 1_{11} в 79 на рис. 8 до последнего: 3_{56} в 51. Рис. 9 демонстрирует ответ на судоку Шортц 301 «в чистом виде».

6	3	9	5	7	4	1	8	2
5	4	1	8	2	9	3	7	6
7	8	2	6	1	3	9	5	4
1	9	8	4	6	7	5	2	3
3	6	5	9	8	2	4	1	7
4	2	7	1	3	5	8	6	9
9	5	6	7	4	8	2	3	1
8	1	3	2	9	6	7	4	5
2	7	4	3	5	1	6	9	8

Рис. 9. Ответ на судоку Шортц 301.

Задача судоку, в которой для решения требуется случайный выбор

Техника случайного выбора требуется для продолжения решения, когда выполняется следующее условие:

Условие 1 (условие свободного выбора). *Когда ни одно приоритетное множество не может быть разложено на меньшие приоритетные множества, для продолжения решения должна быть выбрана случайным образом пустая клетка и случайное число из пополнения этой клетки.*

Клетка, выбранная для продолжения решения, становится вершиной пути поиска, который мы *создаем на лету*, и число, выбранное случайно из пополнения этой клетки, является меткой этой вершины. Лучший способ прослеживания различных путей на дереве задачи – использование цветных карандашей. Мы используем здесь красный цвет для первого пути, зеленый для того пути, который начинается в конце красного пути, затем синий и так далее.

Определим противоречие в судоку.

Определение 4 (противоречие в судоку). *Противоречие в судоку появляется, когда одинаковые номера появляются дважды в одной строке, одном столбце или боксе.*

Преимущество использования цветных карандашей в том, что если появляется противоречие, то легко определить, какие числа в каких клетках стереть. Стирание пути влечет, конечно, и стирание зачеркиваний чисел в соответствующих клетках.

После полного стирания пути, ведущего к противоречию, можно начать новый путь того же цвета. Положим теперь, что два зеленых пути ведут к противоречию, в то время как возможны только два зеленых пути. Тогда следует стереть не только второй зеленый путь, но и красный путь, который является его родителем, поскольку первый путь уже привел к противоречию.

При прочих равных условиях следует выбирать для разветвления клетку с предпочтительным дуплем, если таковая существует, поскольку в этом случае выбор одного из двух чисел в одной клетке вынуждает выбор другого числа из дупля в другой клетке. Если дупля нет, то выбирать следует наименьшее множество из пополнений.

Рис. 10. Пример дерева поиска с путями

На рис. 10 показан пример дерева с тремя путями, из которых только один ведет к решению. Три возможных пути по этому дереву таковы:

(4, 4), (4, 8), (7).

Путь (4, 8), то есть выбор 4 для клетки A и 8 для клетки B, ведет к решению, но вероятность этого пути только ¼, и поэтому шанс против этого пути 3 к 1.

В следующем разделе мы рассмотрим задачу судоку, в которой для решения требуется случайный выбор.

Дьявольская задача судоку Мефама

Задача, изображенная на рис. 11, была опубликована Мефамом (Mepham) (2004, стр.14), который отнес ее к классу дьявольских, потому что она требует построения решения «налету». Назовём эту головоломку Мефам-D.

	9		7			8	6	
	3	1			5		2	
8		6						
		7		5				6
			3		7			
5				1		7		
						1		9
	2		6			3	5	
	5	4			8		7	

Рис. 11. Дьявольская задача судоку Мефама

После ввода всех синглей и пополнений она превращается в задачу, которая показана на рис. 12.

2	9	5	7	34	134	8	6	134
47	3	1	8	6	5	49	2	47
8	47	6	1249	2349	12349	459	1349	13457
1349	148	7	249	5	249	249	13489	6
1469	146	29	3	8	7	2459	149	145
5	48	2389	249	1	6	7	3489	348
367	678	38	5	2347	234	1	48	9
179	2	89	6	479	149	3	5	48
139	5	4	19	39	8	6	7	2

Рис. 12. Разметка дьявольского Судоку Мефама

Приоритетная пара {[47], [21, 29]} на рис. 12 в строке 2 дает сингль 9 в клетке 27. Таким образом, мы вводим 9_1, как показано жирным шрифтом на рис. 13. Приоритетный трипль {[249], [44, 46, 47]} в строке 4 на рис. 12 после соответствующих вычеркиваний образует другой приоритетный трипль {[138], [41, 42, 48]}.

Поскольку больше нет скрытых приоритетных наборов на данном этапе, мы выбираем клетку 21 в боксе 1, в которой находится приоритетная пара {[47] , [21, 32]}. Клетку 21 считаем вершиной пути поиска, который мы строим «на лету». Теперь выберем случайным образом одно из чисел [4,7] в клетке 21 наудачу (например, бросанием монеты). Пусть этим числом будет 4. На рис.13 красный путь определен выделенной жирным шрифтом последовательностью чисел 4_2, 7_3, 7_4.

Красный путь на рис. 13 исчерпывается достаточно быстро, без вычеркиваний, не порождая никаких приоритетных множеств. Начнем теперь зеленый путь, выбрав случайным образом число в клетке 78 из множества [48]. Пусть им станет 8. Обозначим этот путь на рис. 13 нежирным шрифтом. Он определяет последовательность чисел 8_5, 4_6, … 4_{44} и приводит к решению Мефама-Д, как показано на рис. 13.

Дерево поиска для Мефама-D – как раз то дерево, которое мы показали на рис. 10. На рис. 14 изображено решение Мефама-D в «чистом виде».

Заключение. Алгоритм

Действия алгоритма для решения задач судоку таковы:

1. Поиск и расстановка всех синглей в задаче.

2. Разметка задачи (расстановка пополнений).

3. Итеративный поиск приоритетных наборов во всех строках, столбцах и боксах – это соответствующие вычеркивания чисел после обнаружения каждого приоритетного набора, ПОКА

4. а) или решение найдено,

   б) или должен быть применен метод случайного подбора для продолжения решения.

5. Если 4а выполнено, то конец, если нет, то переход к шагу (*пункту*) 3.

2	9	5	7	4_{29}	3_{38}	8	6	1_{39}
4_{2}	3	1	8	6	5	9_{1}	2	7_{4}
8	7_{3}	6	1_{32}	9_{31}	2_{41}	5_{26}	4_{19}	3_{40}
3_{10}	8_{13}	7	4_{44}	5	9_{43}	2_{25}	1_{12}	6
6_{11}	1_{15}	2_{21}	3	8	7	4_{24}	9_{20}	5_{16}
5	4_{14}	9_{22}	2_{23}	1	6	7	3_{17}	8_{18}
7_{9}	6_{8}	3_{7}	5	2_{30}	4_{42}	1	8_{5}	9
9_{35}	2	8_{27}	6	7_{36}	1_{37}	3	5	4_{6}
1_{34}	5	4	9_{33}	3_{28}	8	6	7	2

Рис. 13. Решение дьявольской задачи Мефама

2	9	5	7	4	3	8	6	1
4	3	1	8	6	5	9	2	7
8	7	6	1	9	2	5	4	3
3	8	7	4	5	9	2	1	6
6	1	2	3	8	7	4	9	5
5	4	9	2	1	6	7	3	8
7	6	3	5	2	4	1	8	9
9	2	8	6	7	1	3	5	4
1	5	4	9	3	8	6	7	2

Рис. 14. Ответ к дьявольской задаче Мефама.

О единственности решения задачи судоку

Задача судоку в контексте математики может быть определена как проблема окраски вершин в теории графов. Действительно, достаточно просто заменить множество [1..9] в задаче судоку окраской в 9 различных цветов, и назвать доску судоку *графом*, а клетки – *вершинами*.

Следует оговорить надлежащим образом раскраску графа. Каждый из девяти цветов должен появиться в каждых строке, столбце, боксе. Такого рода раскраска графа G называется его *чистым раскрашиванием.* Минимальное количество цветов, потребных для чистого раскрашивания графа G, называется хроматическим числом G. Для графа, связанного с судоку, разумеется, хроматическое число равно 9.

Хроматический полином графа G – функция от числа цветов λ, использованных для раскраски G. Значение хроматического полинома есть число возможных способов окраски G в λ цветов.

Херцберг (Herzberg) и Мёрти (Murty) (2007, стр.709) доказали следующую важную теорему:

Теорема 3. Пусть G – конечный граф с v вершинами, C – частичная окраска его t вершин d_0 цветами, $p_{G,C}(\lambda)$ – количество возможностей полного (продолжающего C) окрашивания графа G с использованием λ цветов. Тогда $p_{G,C}(\lambda)$ – многочлен (от λ) с целыми коэффициентами степени v-t для $\lambda \geq d_0$.

Значение $p_{G,C}(9)$ должно быть равно 1, чтобы решение задачи (раскраска графа) было единственным.

Примечание 8. *Херцберг (Herzberg) и Мёрти (Murty) (2007, стр.710) доказали, что для единственности продолжения раскраски (решения) C необходимо, чтобы исходная задача судоку, имела по меньшей мере 8 цветов (чисел), то есть* $d_0 \geq 8$.

Вычисление целых коэффициентов $p_{G,C}(9)$ может быть выполнено легко посредством анализа индуктивного доказательства Теоремы 3 (см. Херцберг (Herzberg) и Мёрти (Murty), стр.710). Доказательство по индукции основано на алгоритме частичного удаления (*deletion-contraction)*, подробно рассмотренном Бруэлди (Brualdi) (2004, стр. 529).

Литература

1. Richard A. Brualdi (2004), Introductory Combinatorics, 4-th ed., Pearson Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.
2. Agnes M. Herzberg and M. Ram Murty (2007), Sudoku squares and chromatic polynomials, *Notices Amer. Math. Soc*. 54(6), 708-717.
3. Michael Mepham (2005), *Solving Sudoku*, Crosswords Ltd., Frome, England. Эта статья помещена в Интернете по адресу htpp//www.sudoku.org.uk/PDF/Solving_Sudoku.pdf.
4. Tom Sheldon (2006), *Sudoku MasterClass*, Plume (Penguin), NY.
5. Will Shortz (ред.) (2006), *The Little Black Book of Sudoku*, St. Martin's Griffin, NY.